8 Calcolo combinatorio, probabilità e statistica

1 Richiami di teoria

1.1 Calcolo combinatorio

Fattoriale

Si definisce **fattoriale** di n, e si indica con il simbolo $n!$, il prodotto dei primi n numeri naturali positivi:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$ 1

dove, per convenzione, $0! = 1$. 2

Per i fattoriali valgono le seguenti proprietà:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$ 3

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!$$ 4

Permutazioni

Le **permutazioni semplici** di un insieme finito di n elementi sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con gli n elementi, considerando distinti i raggruppamenti formati da elementi disposti in ordine diverso:

$$\mathrm{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \,.$$ 5

Le **permutazioni con ripetizione** di un insieme finito di n elementi di cui $r_1, r_2, \ldots, r_h$ ripetuti sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con gli n elementi, considerando distinti i raggruppamenti formati da elementi disposti in ordine diverso e per il posto occupato dagli elementi ripetuti:

$$\mathrm{P}_n^{r_1, r_2, \ldots, r_h} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_h!} \,.$$ 6

Disposizioni

Le **disposizioni semplici** di un insieme finito di n elementi di classe k $(k \leq n)$ sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con k elementi, presi tra gli n, considerando distinti i raggruppamenti che differiscono o per la composizione del raggruppamento o per l'ordine degli elementi:

$$\mathrm{D}_{n;k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \,.$$ 7

Le **disposizioni con ripetizione** di un insieme finito di n elementi di classe k sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare prendendo k elementi, distinti o no, presi tra gli n assegnati, considerando distinti i raggruppamenti che differiscono o per la composizione del raggruppamento o per l'ordine degli elementi:

$$\mathrm{D}'_{n;k} = n^k \,.$$ 8

Combinazioni

Le **combinazioni semplici** di un insieme finito di n elementi di classe k sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con k elementi, presi tra gli n, considerando distinti i raggruppamenti che differiscono per almeno un elemento, senza considerare l'ordine con il quale gli elementi sono presi:

$$\mathrm{C}_{n;k} = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \ . \quad \mathbf{9}$$

Le **combinazioni con ripetizione** di un insieme finito di n elementi di classe k sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con k elementi, presi tra gli n, senza considerare l'ordine con il quale gli elementi sono presi, ma con la possibilità che gli elementi si ripetano:

$$\mathrm{C}'_{n;k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1) \cdot (n+k-2) \cdot \ldots \cdot n}{k!} \ . \quad \mathbf{10}$$

Coefficienti binomiali

Formula di Stifel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \mathbf{11}$$

Potenza di un binomio o **binomio di Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad \mathbf{12}$$

1.2 Probabilità

Si dice **probabilità** di un evento E la funzione che a E associa un numero reale $p \in [0; 1]$.

Se E è un evento la sua probabilità si indica con $p(E)$.

La probabilità di un **evento** E **impossibile** è: $p(E) = 0$. **13**

La probabilità di un **evento** E **certo** è: $p(E) = 1$. **14**

Definizione classica: la probabilità di un evento E è il rapporto fra il numero n di casi favorevoli al verificarsi dell'evento E e il numero N dei casi possibili, supposti tutti egualmente probabili:

$$p(E) = \frac{n_{\text{casi favorevoli}}}{N_{\text{casi possibili}}} \ . \quad \mathbf{15}$$

Definizione frequentistica: la probabilità di un evento E, fatto oggetto di rilevazioni statistiche, è il rapporto fra il numero f (**frequenza**) di volte in cui è stato registrato E e il numero totale delle rilevazioni:

$$p(E) = \frac{f_{\text{rilevazioni evento}}}{N_{\text{rilevazioni totali}}} \ . \quad \mathbf{16}$$

Dato un evento E, la negazione di E si dice **evento contrario** e lo si indica con $\overline{E}$. La probabilità di tale evento è:

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E) \ . \quad \mathbf{17}$$

Teoremi della probabilità totale

Dati due eventi A e B **incompatibili**, cioè che non possono avvenire contemporaneamente, la probabilità che si verifichi uno dei due (A o B) è data dalla somma delle singole probabilità dei due eventi:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad . \tag{18}$$

Dati due eventi A e B **compatibili**, cioè che possono avvenire contemporaneamente, la probabilità che si verifichi uno dei due (A o B) è data dalla somma delle singole probabilità dei due eventi diminuita della probabilità del verificarsi dell'evento (A e B):

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad . \tag{19}$$

Teoremi della probabilità composta

Dati due eventi A e B tra loro **indipendenti**, cioè tali che il verificarsi dell'uno non influisca sulla possibilità del verificarsi dell'altro, la probabilità che si verifichino simultaneamente o successivamente è data dal prodotto delle singole probabilità dei due eventi:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad . \tag{20}$$

Dati due eventi A e B tra loro **dipendenti**, cioè tali che il verificarsi dell'uno influisca sulla possibilità del verificarsi dell'altro, la probabilità che si verifichino simultaneamente o successivamente è data dal prodotto della probabilità del primo per la probabilità del secondo, supposto il primo verificato (detta **probabilità condizionata**):

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \backslash A) = p(B) \cdot p(A \backslash B) \quad . \tag{21}$$

Probabilità nelle prove ripetute

Se E è un evento di probabilità p e se è $q = 1 - p$, eseguendo n prove in cui si può avere o l'evento E o l'evento contrario $\overline{E}$,

- la probabilità che E si verifichi k volte, in ordine qualsiasi, è data da:

$$p(E_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad ; \tag{22}$$

- la probabilità che E si verifichi k volte, in ordine prestabilito, è data da:

$$p(E_k) = p^k \cdot q^{n-k} \quad . \tag{23}$$

Teorema di Bayes

Dati gli n eventi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ a due a due incompatibili e tali che la loro unione sia lo spazio campionario, allora per ogni i si ha:

$$p\left(A_i \backslash B\right) = \frac{p\left(A_i\right) \cdot p\left(B \backslash A_i\right)}{p(A_1) \cdot p(B \backslash A_1) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \backslash A_n)} \quad . \tag{24}$$

1.3 Statistica

Indici statistici

Si dice **media aritmetica semplice** il rapporto tra la somma di tutti i valori x_i assunti dalla variabile X e il numero totale delle unità prese in considerazione:

$$M(X) = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad . \tag{25}$$

Si dice **media aritmetica ponderata** il rapporto tra la somma dei prodotti di ciascun valore x_i della variabile X per la rispettiva frequenza a_i e la somma totale delle frequenze:

$$M(X) = \overline{x} = \frac{x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot a_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i} . \tag{26}$$

Per ogni valore x_i della variabile statistica X si dice **scarto dalla media** $\overline{x}$ lo scostamento del singolo valore da quello medio:

$$s_i = x_i - \overline{x} . \tag{27}$$

Si dice **varianza** di una distribuzione statistica, e la si indica con VAR o σ^2, la media aritmetica dei quadrati degli scarti dalla media:

$$\mathrm{VAR}(X) = \sigma^2(X) = M((X - \overline{x})^2) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot a_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i} . \tag{28}$$

Si dice **scarto quadratico medio**, e lo si indica con σ, la radice quadrata della varianza:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{VAR}(X)} . \tag{29}$$

Si dice **covarianza** di due distribuzioni statistiche, e la si indica con COVAR, la media aritmetica dei prodotti degli scarti dalle rispettive medie dei valori associati, cioè dei valori aventi lo stesso indice:

$$\mathrm{COVAR}(X;Y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{n} . \tag{30}$$

Distribuzioni statistiche

Si parla di **distribuzione statistica congiunta** quando si considerano due caratteri presenti per ogni unità statistica. Tale distribuzione si rappresenta mediante una tabella a doppia entrata.

Si parla di **distribuzione condizionata** quando si fissa una particolare modalità per uno dei caratteri e si considerano tutte le modalità associate all'altro carattere.

Si parla di **distribuzione marginale** quando si considerano le frequenze associate a uno solo dei due caratteri, indipendentemente dall'altro.

carattere 1 / carattere 2	*A*	*B*	*C*	*D*	totali
J					
K					
H					
L					
M					
totali					

Distribuzione marginale carattere 2

Distribuzione marginale carattere 1

Un carattere quantitativo X è **assolutamente indipendente** da un carattere Y se l'insieme dei valori assunti da X non varia al variare di Y.

La **frequenza teorica**, se i due caratteri fossero indipendenti, si ha dal prodotto delle frequenze marginali corrispondenti alla posizione cercata diviso per il numero totale delle unità statistiche.

La misura della distanza tra una distribuzione empirica e quella teorica assoluta si indica con χ^2 (**chi quadro**):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} \frac{\left(a_{ij} - \widehat{a}_{ij}\right)^2}{\widehat{a}_{ij}} , \qquad 31$$

dove con a_{ij} si indica la frequenza e con $\widehat{a}_{ij}$ la frequenza teorica.

La **contingenza quadratica media** è il rapporto tra l'indice chi quadro e il numero N delle unità statistiche:

$$\Phi = \frac{\chi^2}{N} . \qquad 32$$

Regressione

Dati n punti, ad esempio $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$, e una funzione $f(x)$ utilizzata per interpolare gli n punti, posto $D_i = (y_i - f(x_i))$, con $1 \leq i \leq n$, si dice che $f(x)$ è la **curva dei minimi quadrati** per i punti dati se essa rende minima la somma

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^2 . \qquad 33$$

Dati n punti di coordinate $(x_i; y_i)$, si definisce loro **baricentro** il punto che ha come coordinate, rispettivamente le medie aritmetiche delle ascisse e delle ordinate dei punti dati. Dette $(x_m; y_m)$ le coordinate del baricentro della distribuzione di punti, la **retta dei minimi quadrati** ha equazione:

$$y = \frac{\mathrm{COVAR}(X;Y)}{\mathrm{VAR}(X)} \cdot (x - x_m) + y_m . \qquad 34$$

Tale equazione si può anche scrivere:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_m) \cdot (y_i - y_m)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_m)^2} \cdot (x - x_m) + y_m . \qquad 35$$

Si chiama **indice di correlazione lineare di Bravais-Pearson** r il valore della seguente espressione:

$$r = \frac{\mathrm{COVAR}(X;Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{\mathrm{COVAR}(X;Y)}{\sqrt{\mathrm{VAR}(X) \cdot \mathrm{VAR}(Y)}} . \qquad 36$$

- Se $0 < r < 1$ la correlazione è **diretta** o **positiva** (all'aumentare di X aumenta in media Y);
- se $-1 < r < 0$ la correlazione è **inversa** o **negativa** (all'aumentare di X diminuisce in media Y);
- se $r = 1$ o $r = -1$ la correlazione è **perfetta** (diretta o inversa);
- se $r = 0$ non esiste correlazione lineare.

Giochi aleatori

Si chiama **speranza matematica** della variabile casuale X che ha per valore i guadagni (positivi o negativi) $S_1, S_2, \dots, S_n$ di un gioco, e la si indica con $M(X)$, il prodotto di tali guadagni per le rispettive probabilità di conseguimento:

$$M(X) = S_1 \cdot p_1 + S_2 \cdot p_2 + \dots + S_n \cdot p_n \, . \qquad (37)$$

Il gioco d'azzardo è detto **equo** se la speranza matematica è nulla.

Se il gioco è organizzato da un banco e il giocatore deve pagare una posta P per partecipare, l'equità si verifica se l'importo da pagare è la somma dei prodotti delle vincite V_i per le rispettive probabilità:

$$P = V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 + \dots + V_n \cdot p_n \, . \qquad (38)$$

Distribuzione binomiale o di Bernoulli

In un esperimento composto da n prove, tutte svolte nelle stesse condizioni, detta p la probabilità di verificarsi dell'evento e x il numero delle volte in cui esso si presenta, si definisce **distribuzione binomiale** o **di Bernoulli** la funzione:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \, . \qquad (39)$$

Il **valor medio** del numero delle volte che l'evento richiesto si verifica è dato dal prodotto del numero delle prove per la probabilità costante dell'evento in ogni prova, cioè:

$$\mu = n \cdot p. \qquad (40)$$

Lo **scarto quadratico medio** del numero delle volte che un evento, di probabilità costante p, si presenta in n prove è:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}. \qquad (41)$$

Distribuzione normale o di Gauss

La funzione della legge che esprime la distribuzione degli errori commessi nelle successive misure di una stessa grandezza o nella rappresentazione di un fenomeno collettivo per il quale tutte le determinazioni hanno la stessa probabilità di essere osservate, dette μ la media e σ lo scarto quadratico medio, si chiama **funzione normale** o **di Gauss** e ha la seguente espressione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, . \qquad (42)$$

L'area della parte di piano delimitata dalla curva di Gauss e dall'asse x vale 1. L'area sotto la curva compresa tra due valori a e b rappresenta la probabilità che x sia compreso tra a e b stessi. (43)

Una variabile casuale X, con valore medio μ e scarto quadratico medio σ, può essere trasformata nella variabile casuale Z, detta **variabile standardizzata** di X, mediante la relazione:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}. \qquad (44)$$

La funzione gaussiana, quando la variabile X viene espressa in forma standardizzata, ha equazione:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \qquad (45)$$

2 Esercizi svolti

Altri problemi e quesiti sono presenti all'indirizzo www.loescher.it/librionline

Quesito 1

QUESITO 6
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Dimostrare che si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

Risoluzione

Si richiede di verificare la formula di Stifel dei coefficienti binomiali indicata, in altra forma, nella **11**.

Ricordata la **9**, si ha $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!}$ e anche $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!}$.

Essendo: $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1)!$ e $k! = k \cdot (k-1)!$, si ottiene:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (n-k) + (n-1)! \cdot k}{(n-1-k)! \cdot (k-1)! \cdot (n-k) \cdot k} = \frac{(n-1)! \cdot (n-k+k)}{(n-1-k)! \cdot (k-1)! \cdot (n-k) \cdot k} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

Quesito 2

QUESITO 9
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Si consideri una data estrazione in una determinata ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

Risoluzione

Poiché nel gioco del Lotto non conta la posizione dei numeri estratti, supponiamo che 1 e 90 siano i primi due. Rimangono nell'urna 88 numeri. Essendo ininfluente l'ordine di estrazione, si tratta di calcolare il numero delle combinazioni semplici di 88 elementi a 3 a 3. Applicando la **9** si ottiene:

$$\mathrm{C}_{88;3} = \binom{88}{3} = \frac{88!}{3! \cdot 85!} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 85!} = 109\,736$$

che esprime il numero richiesto di possibili cinquine.

Quesito 3

QUESITO 1
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

Risoluzione guidata

Considerando solo il girone di andata, si tratta di determinare le combinazioni di 18 elementi a 2 a 2 e pertanto, per la **9**:

$$\mathrm{C}_{18;2} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2! \cdot 16!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{2 \cdot 1 \cdot 16!} = 153$$

Complessivamente, andata e ritorno, si hanno quindi $153 \cdot 2 = 306$ partite.

Si poteva giungere allo stesso risultato pensando che la partita A contro B del girone di andata diventa la partita B contro A nel girone di ritorno e quindi contando come diverse partite dove appaiono le stesse squadre si ottiene che le partite sono pari alle disposizioni di 2 squadre distinte, ovvero alle disposizioni semplici di 18 elementi distinti di classe 2: $D_{18;2} = 18 \cdot 17 = 306$

Quesito 4

QUESITO 10
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
QUESITO 4
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Considerate gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{a; b; c\}$, quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Risoluzione

In base alla definizione di funzione, per la quale a ogni elemento di A si associa uno e un solo elemento di B, con gli elementi di B che però possono essere ripetuti, le funzioni dall'insieme A nell'insieme B corrispondono a tutte le possibili disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 4, cioè, per la **8**: $D'_{3;4} = 3^4 = 81$.

Quesito 5

QUESITO 3
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Calcolare, se esiste, un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1\,048\,576.$$

Risoluzione

Ricordiamo la formula **12** per il calcolo della potenza di un binomio con i valori a e b uguali a 1:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k.$$

Poiché tutte le potenze di 1 valgono 1, si ha allora che $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Si tratta allora di risolvere l'equazione $2^n = 1\,048\,576$ e verificare se esiste un numero naturale n che risolve l'equazione. Calcoliamo quindi:

$$\operatorname{Log}(2^n) = \operatorname{Log} 1\,048\,576 \;\Rightarrow\; n \cdot \operatorname{Log} 2 = \operatorname{Log} 1\,048\,576;$$

$$n = \frac{\operatorname{Log} 1\,048\,576}{\operatorname{Log} 2} = \frac{6{,}02060}{0{,}30103} = 20.$$

Questo ci permette di concludere che il numero naturale cercato esiste ed è 20.

Quesito 6

QUESITO 9
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente: a^{10}, $a^9 b$, $a^8 b^2$, $a^7 b^3$, $a^6 b^4$, $a^5 b^5$, $a^4 b^6$, $a^3 b^7$, $a^2 b^8$, ab^9, b^{10}.

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

Risoluzione guidata

Lo sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$ si ottiene tramite la formula di Newton **12**:

$$(a+b)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot a^{10-k} \cdot b^{k}.$$

I coefficienti delle parti letterali sono i coefficienti binomiali $\binom{10}{k}$. Pertanto essi risultano ordinatamente:

$\binom{10}{0}, \binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \binom{10}{3}, \binom{10}{4}, \binom{10}{5}, \binom{10}{6}, \binom{10}{7}, \binom{10}{8}, \binom{10}{9}, \binom{10}{10}$,

ovvero

1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

I coefficienti dello sviluppo si possono ottenere anche attraverso il metodo ricorsivo del *triangolo di Tartaglia*, sviluppato fino alla decima riga. La caratteristica di tale triangolo è quella che ogni coefficiente è la somma dei due coefficienti della riga precedente che si trovano nella colonna a sinistra e nella colonna a destra del termine da determinare.

Quesito 7

QUESITO **10**
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

Risoluzione guidata

Le femmine sono 15 e devono essere scelte in gruppi di 3 Pertanto i modi di scelta delle ragazze sono le combinazioni di 15 elementi a 3 a 3 , cioè $C_{15;3}$ In maniera analoga si stabilisce che le combinazioni per i maschi sono $C_{12;2}$ Il numero delle possibili delegazioni si ottengono moltiplicando $C_{15;3}$ per $C_{12;2}$, ottenendo:

$$C_{15;3} \cdot C_{12;2} = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} \cdot \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 = 30\,030.$$

Problema 1

PROBLEMA **2**
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Nel Liceo Scientifico «Torricelli» vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione / sesso	*A*	*B*	*C*	*D*
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

a. Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.

b. Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.

c. Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5ª A, questa sia formata da alunni di sesso:

1. maschile; **2.** femminile; **3.** differente.

Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?

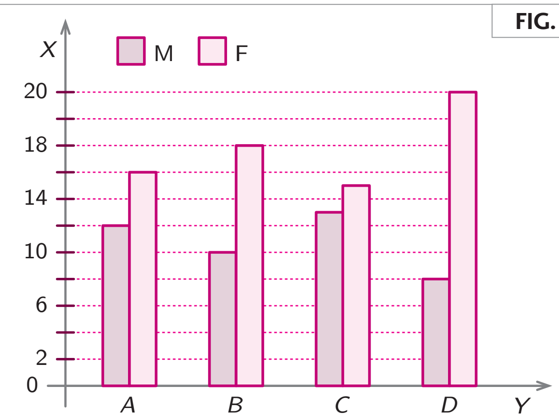
d. Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.

e. Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5ª D.

Risoluzione

a. In **figura 1** è riportato l'istogramma che rappresenta la suddivisione degli alunni per sesso in ciascuna delle quattro quinte considerate.

FIG. 1



b. Nell'insieme degli studenti delle classi quinte del Liceo «Torricelli» consideriamo le due variabili casuali del problema:

- sesso (X), i cui valori sono M e F;
- sezione (Y), i cui valori sono A, B, C, D.

Orliamo la tabella dei dati ottenendo la distribuzioni marginali per sesso e sezione.

sesso \ sezione	*A*	*B*	*C*	*D*	sesso
M	12	10	13	8	43
F	16	18	15	20	69
sezione	28	28	28	28	112

c. Per calcolare la probabilità di ciascun tipo di coppia di eventi, si utilizza il teorema della probabilità composta tenendo conto che i due eventi che formano l'evento composto sono stocasticamente dipendenti. Il procedimento adottato è schematizzato dal diagramma ad albero riportato, in cui M e F sono rispettivamente gli eventi «L'alunno è maschio» e «L'alunno è femmina».

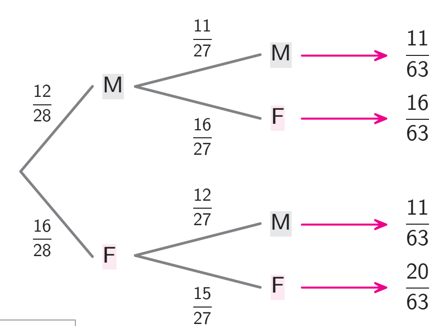


FIG. 2

La probabilità che, in 5ª A, il primo studente scelto sia un maschio è $\frac{12}{28}$, mentre la probabilità che anche il secondo lo sia è $\frac{11}{27}$. Quindi la probabilità

$p(M \cap M) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{11}{63}$.

Analogamente, la probabilità di scegliere una coppia di studenti di sesso femminile è

$p(F \cap F) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{20}{63}$.

La probabilità di scegliere una coppia di studenti di sesso differente è la somma logica di due eventi incompatibili, quindi:

$p[(M \cap F) \cup (F \cap M)] = \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} + \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} = 2 \cdot \frac{16}{63} = \frac{32}{63}$.

Le probabilità richieste dal quesito sono rispettivamente $\frac{11}{63}$, $\frac{20}{63}$, $\frac{32}{63}$ e la loro somma vale 1.

d. La probabilità E che la coppia scelta sia formata da un maschio e una femmina è la somma logica di quattro eventi composti a due a due incompatibili; infatti:

$$p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap B) + p(E \cap C) + p(E \cap D)$$

dove però $p(E \cap X) = p(X) \cdot p(E \backslash X)$, avendo indicato con X uno dei quattro valori A, B, C, D.

Abbiamo già calcolato al punto precedente $p(E \backslash A)$; con un procedimento analogo possiamo calcolare:

$$p(E \backslash B) = \frac{10}{28} \cdot \frac{18}{27} + \frac{18}{28} \cdot \frac{10}{27} = 2 \cdot \frac{5}{21} = \frac{10}{21}, \quad p(E \backslash C) = \frac{13}{28} \cdot \frac{15}{27} + \frac{15}{28} \cdot \frac{13}{27} = 2 \cdot \frac{65}{252} = \frac{65}{126}.$$

Otteniamo infine:

$$p(E) = p(A) \cdot p(E \backslash A) + p(B) \cdot p(E \backslash B) + p(C) \cdot p(E \backslash C) + p(D) \cdot p(E \backslash D) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{63} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{21} + \frac{1}{4} \cdot \frac{65}{126} + \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{189} = \frac{192+180+195+160}{1512} = \frac{727}{1512} = 0{,}48.$$

e. Per rispondere all'ultima domanda possiamo applicare la formula di Bayes **24** scrivendo:

$$p(D \backslash M) = \frac{p(D) \cdot p(M \backslash D)}{p(A) \cdot p(M \backslash A) + p(B) \cdot p(M \backslash B) + p(C) \cdot p(M \backslash C) + p(D) \cdot p(M \backslash D)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{28}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{28}} = \frac{\frac{8}{112}}{\frac{12}{112} + \frac{10}{112} + \frac{13}{112} + \frac{8}{112}} = \frac{8}{43}.$$

Allo stesso risultato si può giungere dicendo che i maschi di tutte le quattro sezioni sono 43 e di questi 8 frequentano la 5ª D. La probabilità, quindi, che uno studente maschio scelto fra le classi quinte provenga dalla 5ª D è $\frac{8}{43}$.

Quesito 8

QUESITO 6
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
QUESITO 7
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

Risoluzione

$n!$, per n intero positivo, è definito come il prodotto di tutti gli interi tra 1 e n.

In formule: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Per convenzione si pone: $0! = 1$.

Nel calcolo combinatorio il suo significato corrisponde al numero delle permutazioni semplici di n oggetti, cioè il numero di quei raggruppamenti contenenti n elementi tali da differire uno dall'altro solamente per l'ordine in cui compaiono gli elementi: $\mathrm{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Il legame con i coefficienti binomiali, che rappresentano le combinazioni semplici di n oggetti a gruppi di k, è dato dalla **9**:

$$\mathrm{C}_{n;k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Poiché le combinazioni semplici corrispondono alle disposizioni semplici (tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con k elementi, presi tra gli n, considerando distinti i raggruppamenti che differiscono o per la composizione del raggruppamento o per l'ordine degli elementi) divise per le possibili permutazioni dei k elementi, si ha:

$$\mathrm{C}_{n;k} = \frac{\mathrm{D}_{n;k}}{\mathrm{P}_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Quesito 9

QUESITO 1
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.
QUESITO 4
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Se a e b sono numeri positivi assegnati, qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

Qui di seguito il testo del quesito 4 della sessione ordinaria Scientifico avente lo stesso oggetto. Si consideri la seguente proposizione: «La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica». Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

Risoluzione

Siano a e b due numeri positivi. La loro media aritmetica è $M = \dfrac{a+b}{2}$, mentre quella geometrica è $G = \sqrt{a \cdot b}$.

Per valutare quale delle due sia la più grande scriviamo $M > G$ e verifichiamo successivamente se tale proposizione è vera o falsa. Avremo:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$$

ed essendo a e b positivi, possiamo elevare al quadrato i due termini della disuguaglianza:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2,$$

ottenendo

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab \quad \Rightarrow \quad a^2+2ab+b^2 > 4ab \quad \Rightarrow \quad a^2-2ab+b^2 > 0,$$

cioè $(a-b)^2 > 0$, che è sempre verificata per $a \neq b$.

Possiamo concludere dicendo che la media aritmetica è sempre maggiore della media geometrica quando a è diverso da b, mentre le due medie coincidono se $a = b$, e possiamo scrivere $M \geq G$.

In generale, se i numeri assegnati sono n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la media aritmetica è il quoziente fra la loro somma e il numero n, mentre la media geometrica è la radice n-esima del prodotto degli n valori. Si ha pertanto:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{e}$$

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

PROBLEMA 1
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Problema 2

Sia γ la curva d'equazione: $y = k \cdot e^{-\lambda x^2}$ ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;

2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;

3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;

4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta curva standard degli errori o delle probabilità o normale di Gauss [da Karl Friedrich Gauss (1777-1855)]. Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

Risoluzione guidata

1. La funzione $f(x) = k \cdot e^{-\lambda x^2}$, con $k > 0$ e $\lambda > 0$, è una funzione continua (essendo la composizione di funzioni continue), definita e positiva su tutto $\mathbf{R}$. Poiché, inoltre, $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari e quindi simmetrica rispetto all'asse delle y Interseca l'asse y nel punto ($0; k$).

Calcolando i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} k \cdot e^{-\lambda x^2} = 0 \,,$$

si ricava che l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale ed è anche l'unico asintoto per $f(x)$.

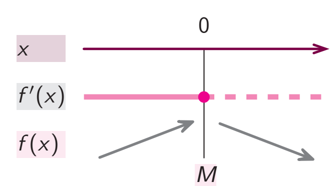
Determiniamo la derivata prima: $f'(x) = -2\lambda k x \cdot e^{-\lambda x^2}$

$f'(x)$ risulta assumere lo stesso segno di $-x$ in quanto $2\lambda k \cdot e^{-\lambda x^2}$ è una quantità sicuramente positiva

Si ha pertanto:

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

Lo schema a fianco mostra che la funzione ha un massimo in $M($ $0; k$ $)$, e pertanto tale punto è anche un massimo assoluto per il grafico della funzione.



Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = (-2\lambda k x \cdot e^{-\lambda x^2})' = -2\lambda k \cdot e^{-\lambda x^2} - 2\lambda k x(-2\lambda x \cdot e^{-\lambda x^2}) =$$

$$= -2\lambda k \cdot e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2).$$

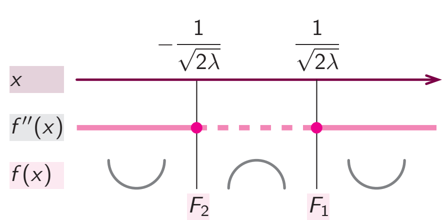
Ricordando che $2\lambda k \cdot e^{-\lambda x^2}$ è una quantità sempre positiva, si ha:

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow -(1 - 2\lambda x^2) \geq 0 \Rightarrow 2\lambda x^2 - 1 \geq 0.$

Risolvendo l'equazione $2\lambda x^2 - 1 = 0$ si ottiene $x_{1;2} = \mp\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ e quindi la soluzione

$$x \leq -\sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$$

Lo schema a fianco permette di valutare la concavità e i punti di flesso.

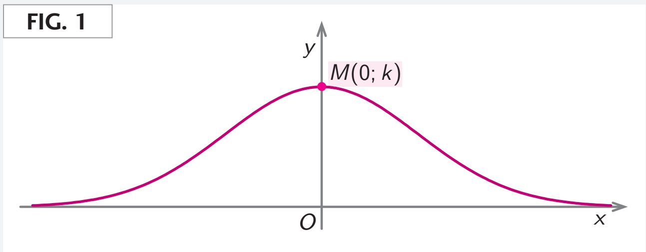


Il grafico della funzione presenta due punti di flesso

$F_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; \frac{k}{\sqrt{e}}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; \frac{k}{\sqrt{e}}\right)$,

come è rappresentato nella **figura 1**.

FIG. 1



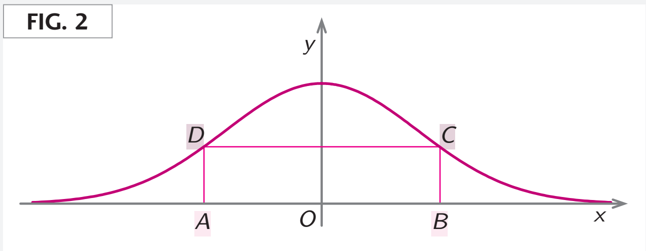
2. Il rettangolo di cui si chiede l'area massima è rappresentato nella **figura 2** seguente.

Detta x l'ascissa del punto B, essendo la funzione f pari, $f(-x) = f(x)$, e quindi simmetrica rispetto all'asse y, i vertici del rettangolo hanno coordinate:

$A(-x; 0)$, $B(x; 0)$,

$C(x; f(x))$, $D(-x; f(-x))$.

FIG. 2



L'area a del rettangolo $ABCD$ espressa in funzione di x, vale:

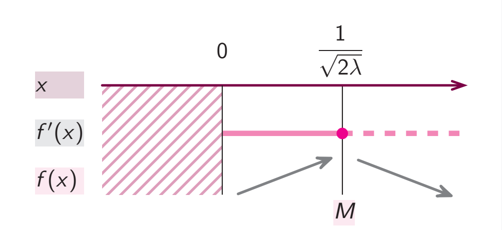
$a = y(x) = 2x \cdot f(x) = 2kxe^{-\lambda x^2}$, con $x > 0$.

Calcoliamo ora la derivata prima di tale funzione: $y' = 2ke^{-\lambda x^2} \cdot (1 - 2\lambda x^2)$.

Essendo $2ke^{-\lambda x^2} > 0$ e $x > 0$, si ha:

$y' > 0 \;\Rightarrow\; 2ke^{-\lambda x^2} \cdot (1 - 2\lambda x^2) > 0 \;\Rightarrow\; 1 - 2\lambda x^2 > 0 \;\Rightarrow\; 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

Dallo schema dello studio della derivata prima si deduce che: l'area del rettangolo $ABCD$ è minima per $x = 0$, massima per $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, cioè quando i punti C e D coincidono con i flessi della funzione.



L'area massima vale $a_{\max} = 2\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}ke^{-\frac{1}{2}}$

3. Assunto $\lambda = \frac{1}{2}$ e sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, dobbiamo imporre la condizione, detta di normalizzazione, all'area compresa tra γ e l'asse x, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Sostituendo $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, per cui $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-t^2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = k\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = k\sqrt{2\pi} = 1$$

da cui si ottiene

$$k\sqrt{2\pi} = 1 \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. Per i valori $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, γ costituisce l'equazione della curva gaussiana standard corrispondente a una media $\mu = 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma = 1$.

Se $\mu \neq 0$ e $\sigma \neq 1$, l'equazione della gaussiana diventa: $y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Il grafico subisce le variazioni indicate nei punti seguenti.

- $-\mu \neq 0$ e $\sigma = 1$.
  Il grafico risulta quello della curva guassiana standard traslato orizzontalmente di un tratto uguale a μ.
  È quindi simmetrico rispetto alla retta $x = \mu$ (**figura 3**).

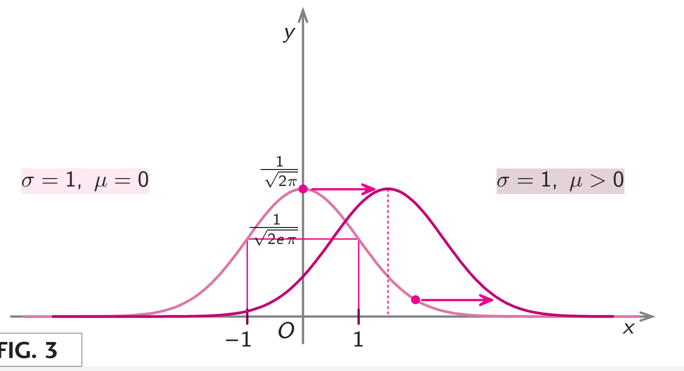


FIG. 3

- $-\mu \neq 0$ e $\sigma > 1$.
  La gaussiana risulta allargata orizzontalmente e quindi per la condizione di normalizzazione il punto di massimo deve diminuire di ordinata.
  Come nel caso precedente permane la simmetria rispetto alla retta $x = \mu$ (**figura 4**).

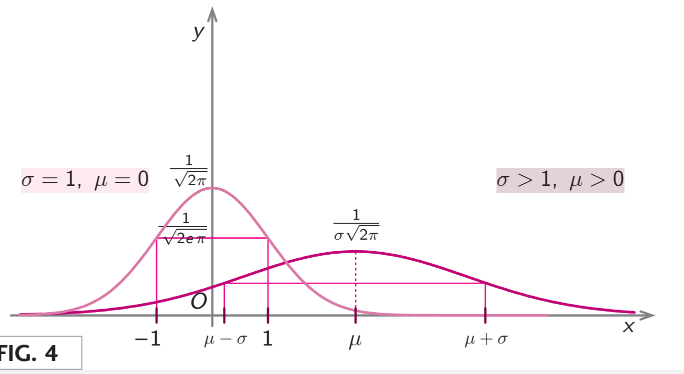


FIG. 4

- $-\mu \neq 0$ e $0 < \sigma < 1$.
  La gaussiana risulta ristretta orizzontalmente e quindi per la condizione di normalizzazione il punto di massimo deve aumentare di ordinata.
  Come nel caso precedente permane la simmetria rispetto alla retta $x = \mu$ (**figura 5**).

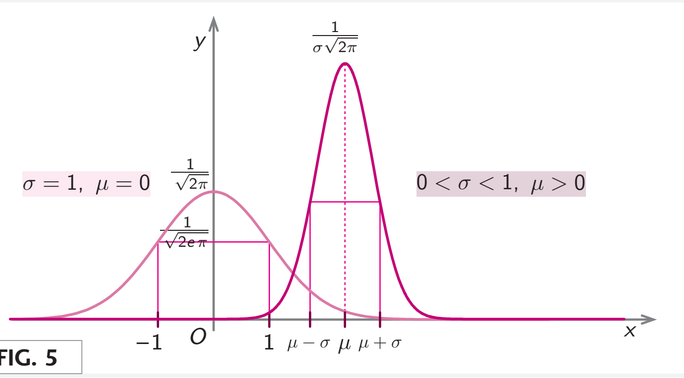


FIG. 5

Quesito 10

QUESITO 10
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Risoluzione

Detta P la popolazione totale, x l'età media del 40% della popolazione che ha da 60 anni in su e y l'età media della restante parte della popolazione si ha $\frac{0{,}4 \cdot P \cdot x + 0{,}6 \cdot P \cdot y}{P} = 30$, con la condizione

$x \geq 60$ e $0 < y < 60$. *

Semplificando si ricava $0{,}4 \cdot x + 0{,}6 \cdot y = 30$. **

Esplicitando la ** rispetto a x si ottiene $x = \frac{30-0{,}6y}{0{,}4}$ e, sostituita l'espressione ottenuta nella condizione *, si ricava:

$$\frac{30-0{,}6y}{0{,}4} \geq 60 \;\Rightarrow\; 30-0{,}6y \geq 24 \Rightarrow 0{,}6y \leq 6 \;\Rightarrow\; y \leq 10\,.$$

Esplicitando la ** rispetto a y si ottiene $y = \frac{30-0{,}4x}{0{,}6}$; sostituita l'espressione ottenuta nella condizione *, si ricava:

$$0 < \frac{30-0{,}4x}{0{,}6} < 60 \Rightarrow 0 < 30-0{,}4x < 36 \Rightarrow -30 < -4x < 6 \Rightarrow -15 < x < 75\,.$$

La condizione trovata per la x permette di concludere che è possibile con $x \geq 60$ un'età media della popolazione uguale a 30 anni, anche se la restante parte della popolazione non oltre i 60 (y) deve avere un'età inferiore a 10 anni.

La risposta alla domanda è quindi affermativa, anche se nella pratica tale situazione, essendo la popolazione di un paese costituita da tutte le classi di età, non risulta facilmente realizzabile.

Quesito 11

QUESITO 8
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

Risoluzione guidata

I casi favorevoli sono costituiti dalle combinazioni dei 12 ragazzi presi 3 a 3, mentre i casi possibili sono dati dalla combinazione dei 16 allievi sempre presi 3 a 3

Ricordando la 9, risulta pertanto:

$$p = \frac{C_{12;3}}{C_{16;3}} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{\frac{12!}{3!\cdot 9!}}{\frac{16!}{3!\cdot 13!}} = \frac{\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2}}{\frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2}} = \frac{220}{560} = \frac{11}{28}\,.$$

Quesito 12

QUESITO 2
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré (1610-1685), amico di Blaise Pascal: «Giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?»

Risoluzione

Valutiamo inizialmente la probabilità di ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado e successivamente la probabilità di ottenere un doppio 1 con 24 lanci di due dadi.

La probabilità che in un lancio esca 1 è $\frac{1}{6}$. Ogni lancio è indipendente dall'altro e la probabilità P che non esca mai il numero 1 in quattro lanci è una probabilità composta per eventi indipendenti; essa vale, per la 20:

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Poiché l'evento «il numero 1 esce almeno una volta» è l'evento contrario di «non esce mai il numero 1 in quattro lanci», si trova che la probabilità P' di questo evento è, per la **17**:

$$P' = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0{,}5177.$$

Per calcolare la probabilità del doppio 1 con ventiquattro lanci, si ragiona in modo analogo, tenendo conto che i lanci dei due dadi sono indipendenti. La probabilità che esca un doppio 1 lanciando due dadi è

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

La probabilità che non esca mai un doppio 1 in ventiquattro lanci è una probabilità composta per eventi indipendenti e vale:

$$p = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Poiché l'evento «esce un doppio 1 almeno una volta» è l'evento contrario di «non esce mai un doppio 1 in ventiquattro lanci», si trova che la probabilità p' di questo evento è:

$$p' = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914.$$

Dal confronto dei due risultati si deduce che è maggiore la probabilità di ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado.

Quesito 13

QUESITO 3
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Assumendo che i risultati X, 1, 2 delle 13 partite di Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

Risoluzione guidata

La probabilità che una partita finisca in parità vale $\frac{1}{3}$ e la probabilità che ciò non accada è $\frac{2}{3}$

Siamo di fronte a un evento elementare del tipo «prove ripetute» o di Bernoulli e la probabilità richiesta si può ricondurre alla probabilità di avere 12 successi in 13 prove ognuna delle quali indipendente dall'altra.

Pertanto la probabilità p cercata è, per la **22**:

$$p = \binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 13 \cdot \frac{2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}}.$$

Quesito 14

QUESITO 2
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica, di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e B ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?

Risoluzione guidata

Definiti con A, B, C, D i seguenti eventi:

$A =$ «estrazione di una lampada dalla scatola A»,

$B =$ «estrazione di una lampada dalla scatola B»,

$C =$ «estrazione di una lampada dalla scatola C»,

$D =$ «estrazione di una lampada difettosa»,

possiamo notare che $D \cap A$, $D \cap B$, $D \cap C$ sono eventi fra loro incompatibili e che l'evento D si ottiene come unione dei tre eventi precedenti: $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$.

La probabilità di D è per la **18**:

$$P(D) = p(D \cap A) + p(D \cap B) + p(D \cap C)$$

e applicando la **21** otteniamo:

$$P(D) = p(D \setminus A) \cdot p(A) + p(D \setminus B) \cdot p(B) + p(D \setminus C) \cdot p(C)$$

Nel caso in esame avremo dunque:

$$P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+4+2}{20} \right) = \frac{7}{60} = 0{,}1167\,.$$

Quesito 15

QUESITO 9
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Due giocatori, A e B, giocano a «Testa o Croce» con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore A lancia la moneta: se esce «Testa» vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene «Croce», in caso contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene «Testa». In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene «Croce». Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

Risoluzione

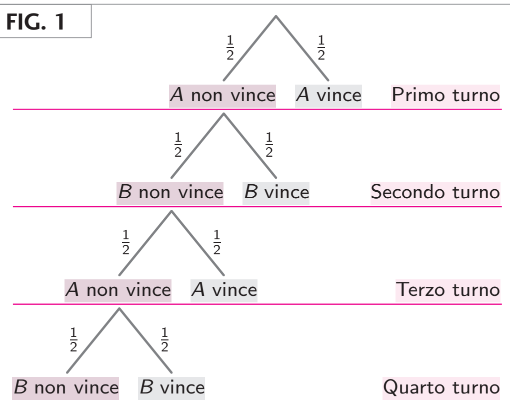
Un gioco è equo quando le poste dei due giocatori sono direttamente proporzionali alla probabilità di vincita.

Indicate con $p(A)$ la probabilità che vinca A, con $p(B)$ la probabilità che vinca B, poiché i giocatori A e B puntano la stessa somma S, affinché il gioco sia equo deve verificarsi $p(A) = p(B)$.

Calcoliamo $p(A)$ e $p(B)$ utilizzando il teorema della probabilità composta, aiutati dal diagramma ad albero in cui sono riportati i 4 turni di gioco e le possibili successioni degli eventi stocasticamente dipendenti che formano l'evento composto (**figura 1**).

I rami uscenti da un nodo (che in questo caso è un turno di gioco) rappresentano eventi incompatibili e pertanto la somma delle rispettive probabilità vale 1.

FIG. 1



Il giocatore A può vincere al primo o al terzo turno, quindi
$p(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$;
il giocatore B può vincere al secondo o al quarto turno, quindi
$p(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.
Infine la probabilità che nessuno dei due giocatori vinca e ciascuno riprenda la somma che aveva puntato è pari a $\frac{1}{16}$. Poiché $p(A) = 2 \cdot p(B)$, il gioco non è equo.

Il gioco sarebbe stato equo se la puntata del giocatore A fosse stata doppia di quella del giocatore B.

Quesito 16

QUESITO 9
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Risoluzione

Ci sono tre casi per cui la somma dei punteggi dei due dadi è 10: (1° dado 4, 2° dado 6), (1° dado 5, 2° dado 5) e (1° dado 6, 2° dado 4).

I casi possibili sono 36, quindi la prima probabilità richiesta è $p_1 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$.

Per rispondere alla seconda domanda occorre ricordare che siamo in presenza di un caso del tipo «prove ripetute» o di Bernoulli. Applicando la **22** si ottiene:

$p_2 = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^4 = 15 \cdot \frac{11^4}{12^6} = 0{,}0735.$

La terza probabilità richiesta è complementare alla probabilità di ottenere nessun 10 oppure un 10 tra i 6 lanci. Si ottiene quindi, per la **17**:

$$p_3 = 1 - \left[\binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^6 + \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^5\right] =$$

$$= 1 - \frac{6 \cdot 11^5 + 11^6}{12^6} = 1 - \frac{17 \cdot 11^5}{12^6} = 0{,}0831.$$

Quesito 17

QUESITO 8
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico
P.N.I.

In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

Risoluzione guidata

Scelta a caso un'urna tra le tre a disposizione, è stata estratta una pallina bianca. L'obiettivo è quello di calcolare la probabilità che la pallina rimasta nell'urna scelta sia pure essa bianca, ossia la probabilità di aver scelto l'urna A sapendo che la pallina estratta è bianca.

Indicate ordinatamente con A, B e C le tre urne, si considerino i seguenti eventi:

E = «la prima pallina estratta è bianca»; A = «è stata scelta l'urna A»;

B = «è stata scelta l'urna B»; C = «è stata scelta l'urna C».

La probabilità che, uscita una pallina bianca, sia stata scelta l'urna A, è per il teorema di Bayes 24:

$$P(A \backslash E) = \frac{p(A) \cdot p(E \backslash A)}{p(A) \cdot p(E \backslash A) + p(B) \cdot p(E \backslash B) + p(C) \cdot p(E \backslash C)}.$$

Essendo:

$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}$, $p(E \backslash A) = 1$, $p(E \backslash B) = 0$ e $p(E \backslash C) = \frac{1}{2}$, si ottiene:

$$P(A \backslash E) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Poiché $P(A \backslash E) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, scommettere alla pari che la pallina rimasta è bianca è vantaggioso

+ risorse online

Problema 3

PROBLEMA 2
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico
P.N.I.

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

Risoluzione guidata

1. Una funzione $f(x)$ si definisce limitata nel suo insieme di definizione A se esiste un numero reale positivo M tale che $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

La funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali

Osservando che $\forall x \in \mathbb{R}$ è $1 + x^2 \geq 1$, e quindi $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$, si può scrivere:

$$|f_a(x)| = \left| \frac{a}{1+x^2} \right| \leq |a| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione è dunque limitata nel campo reale.

2. Studiamo il grafico della funzione per a positivo. Poiché $f_a(-x) = f_a(x)$, f è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, ed essendo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a}{1+x^2} = 0$, l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per la curva. Poiché $1 + x^2 \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$, cioè $0 < \dfrac{a}{1+x^2} \leq a$,

la funzione è sempre positiva e minore o uguale ad a

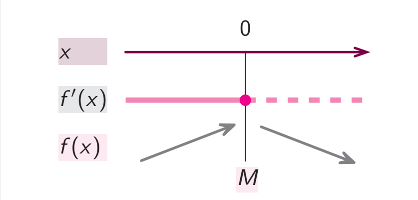
$f_a(x)$ passa per il punto A $(0; a)$ e, per la simmetria evidenziata in precedenza, tale punto risulta essere punto di massimo per la curva.

A questo risultato si può giungere anche attraverso lo studio delle derivate.

La derivata prima è:

$$f'_a(x) = \frac{-2ax}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Studiandone il segno si ottiene: $f'_a(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2ax \geq 0$, essendo $\left(1+x^2\right)^2$ sempre positivo, da cui segue $x \leq 0$.



Analizzando lo schema a lato si deduce che $x = 0$ è un punto di massimo (assoluto), che $f_a(x)$ è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$.

La derivata seconda è:

$$f''_a(x) = \frac{-2a\left(1+x^2\right)^2 + 2ax\,4x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2a\left(1+x^2\right)\left(1+x^2-4x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{-2a\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Lo studio del segno di f''_a ci permette di concludere che nei punti $x_{1;2} = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$ la derivata seconda si annulla e, dipendendo il segno della derivata solamente da quello di $-(1-3x^2)$, nei punti con tali ascisse si avrà un flesso.

La circonferenza di diametro OA ha centro in $P\left(0; \frac{a}{2}\right)$ e raggio $\frac{a}{2}$

La sua equazione è

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

cioè

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella **figura 1** sono rappresentate la curva e la circonferenza.

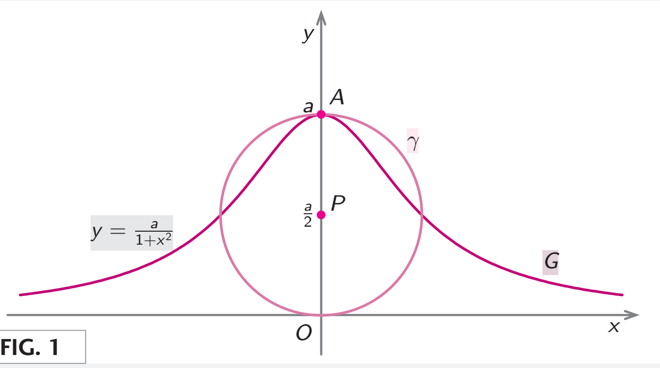


FIG. 1

3. Per determinare le intersezioni delle curve γ e G bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \frac{a}{1+x^2} \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{a}{1+x^2}\right)^2 - a\frac{a}{1+x^2} = 0 \\ y = \dfrac{a}{1+x^2} \end{cases}$$

si ricava l'equazione in x:

$$x^2 \cdot \left(1+x^2\right)^2 + a^2 - a^2 \cdot \left(1+x^2\right) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot \left(1+x^2\right)^2 - a^2x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \cdot \left(x^4 + 2x^2 + 1 - a^2\right) = 0.$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene:

$x^2 = 0 \vee x^4 + 2x^2 + 1 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \vee (x^2+1)^2 = a^2$

e quindi due soluzioni coincidenti $x_{1;2} = 0$ e due soluzioni opposte $x^2_{3;4} = -1 \mp a$

Considerando la condizione $a > 0$, la soluzione $x^2 = -1 - a$ essendo negativa non è accettabile, mentre si avranno altre due soluzioni dall'equazione $x^2 = -1 + a$, con $a \geq 1$, e cioè: $x_{3;4} = \mp\sqrt{-1 + a}$.

I punti di intersezione, per la simmetria della figura, avranno entrambi ordinata

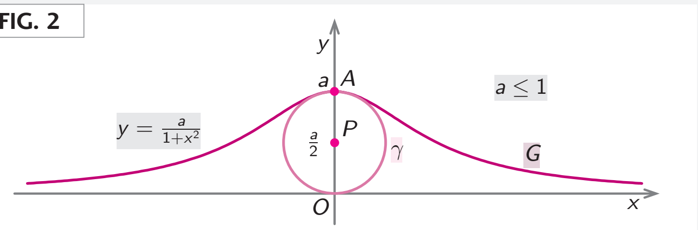
$$y = \frac{a}{1 + (\sqrt{-1+a})^2} = \frac{a}{1 - 1 + a} = 1.$$

Poiché la radice esiste solamente se $-1 + a \geq 0$ e cioè per $a \geq 1$, si hanno le seguenti situazioni:

- $0 < a \leq 1$, le curve hanno un solo punto in comune, $A(0; a)$;
- $a > 1$, le curve hanno tre punti in comune.

Nella figura 1 si era rappresentata quest'ultima situazione, mentre nella **figura 2** è rappresentato il caso di a positivo minore o uguale a 1.

FIG. 2



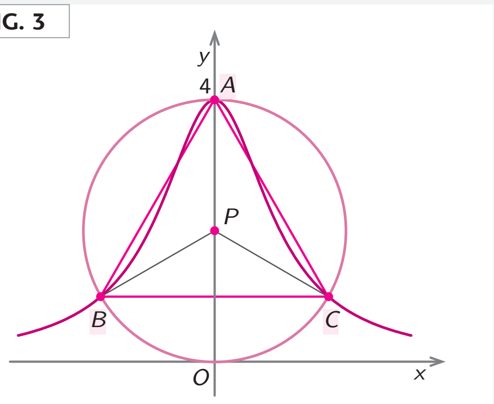
4. Per calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero occorre ricordare che il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r ha altezza $\frac{3}{2}r$ e lato $\sqrt{3}\,r$ Poiché il raggio della circonferenza è $\frac{a}{2}$, il lato del triangolo è $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

La distanza tra i punti $A(0; a)$ e $C\left(\sqrt{a-1};\ 1\right)$ indicati in **figura 3** è

$$\overline{AC} = \sqrt{(\sqrt{a-1} - 0)^2 + (1 - a)^2}$$

e rappresenta la misura del lato del triangolo equilatero.

FIG. 3



Dovrà pertanto essere:

$$\sqrt{(\sqrt{a-1} - 0)^2 + (1-a)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Elevando al quadrato avremo: $a - 1 + 1 - 2a + a^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a^2 - 4a = 0$, da cui:

$$a_{1;2} = \left\langle \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 4 \end{array} \right.$$

La soluzione accettabile è solamente la seconda in quanto perché ci siano le tre intersezioni deve essere $a > 1$ Il quesito ha pertanto come unica soluzione $a = 4$.

5. La funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ è continua e positiva in tutto il campo reale per $a > 0$.

Affinché f_a sia una funzione di densità di probabilità dovrà essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{*}$$

Si calcoli innanzitutto $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; tenendo presente la simmetria della funzione si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{h\to+\infty}\int_{0}^{h} \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{h\to+\infty}\left[a\,(\operatorname{arc\,tg} x)\right]_0^h =$$

$$= 2\lim_{h\to+\infty} a\left[\operatorname{arc\,tg}(h) - \operatorname{arc\,tg}(0)\right] = 2a\lim_{h\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}(h) = 2a\,\tfrac{\pi}{2} = a\,\pi.$$

Imponendo la condizione * si ottiene $a\,\pi = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{\pi}$; il valore a' cercato è quindi $a' = \frac{1}{\pi}$.

La funzione di distribuzione (o di ripartizione) $F(x)$ di una variabile aleatoria continua X è definita come

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e fornisce la probabilità che la variabile X non superi un determinato valore x ed è la primitiva della funzione di densità di probabilità.

Nel caso in esame sarà:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\lim_{h\to-\infty}\int_{h}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cdot\lim_{h\to-\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}(t)\right]_h^x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} x - \lim_{h\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} h\right] = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\pi} + \frac{1}{2}.$$